Examen 1° session
de Programmation logique et Logique

Durée : 3h
Tout document autorisé
Barème indicatif : 1.1 : 3, 1.2 : 3, 1.3 : 6, 2.1 : 3, 2.2 : 1, 2.3 : 1, 2.4 : 3

Remarque : on fournit en annexe un bref rappel des règles de la méthode de tableaux, avec une correction des erreurs du document distribué en cours.

1 Prolog

1.1 Sous-listes

La liste $L2$ est une sous-liste de la liste $L1$ si $L2$ est obtenue en enlevant des éléments (éventuellement aucun) de la liste $L1$. C'est ainsi que $[2], [1,3], [1,2,3]$ sont des sous-listes de la liste $[1,2,3]$.

On demande d'écrire le prédicat *sousliste* défini par :
$sousliste(L1, K, L2)$ vrai si et seulement si $L2$ est une sous-liste de longueur K de la liste $L1$.
Exemple :

```
>> sousliste([1,2,3],2,SL).
SL = [1,2]; SL = [1,3]; SL = [2,3].
```

On commentera avec soin le programme obtenu. On donnera au moins un exemple de son fonctionnement, différent de l'exemple. Cet exemple devra donner des résultats conformes à votre programme.

1.2 Analyse syntaxique

On donne la grammaire suivante :
S : :=a | bSS.

1.2.1

Ecrire l'analyseur syntaxique rec_S(X) vrai si et seulement si X est une liste de a et b engendrée par cette grammaire. Par exemple rec_S([a]) donne la réponse true.

1.2.2

Faites la trace de la requête rec_S([b,a,a]).

1.2.3

Modifier l'analyseur en trad_S(X,A) vrai si et seulement si X est une liste de a et b engendrée par cette grammaire et si A est l'arbre engendré par l'analyse de X. Par exemple :

```
>>trad_S([b,a,a],A).
A=s(b,s(a),s(a)).
```

1.3 Contraintes

On souhaite disposer p reines sur un échiquier $p*p$ de sorte qu'elles ne soient pas en prise. D'après les règles des échecs, 2 reines sont en prise si elles sont sur la même ligne, la même colonne ou la même diagonale.

La position d'une reine est définie par un couple d'entiers (X, Y) où X et Y sont deux entiers entre 1 et p. On suppose que la case $(1, 1)$ est en haut à gauche de l'échiquier et la case (p, p) est en bas à droite.

Notons $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ les positions de 2 reines. Ces 2 reines sont en prises dans les cas suivants :
- elles sont sur la même ligne : $(X_1 = X_2)$
- elles sont sur la même colonne : $(Y_1 = Y_2)$
- elles sont sur la même diagonale droite-gauche : $(X_1 - Y_1 = X_2 - Y_2)$
- elles sont sur la même diagonale gauche-droite : $(X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2)$

Ce problème se termine (cf 1.3.3) par la rédaction du prédicat $reines(L)$ où $L = [X_1, \ldots X_p]$. Chaque X_i est la ligne de la reine de la colonne i : avec ce codage, les reines sont dans des colonnes distinctes. Par exemple :

```
>>size(L)=4,reines(L).
L = [2,4,1,3]; L = [3,1,4,2].
```

La réponse $[2, 4, 1, 3]$ correspond à l'échiquier suivant où les reines sont marquées par la lettre R.

		R	
R			
			R
	R		

1.3.1

Ecrire en Prolog (avec des commentaires) le prédicat $diag1elt$ défini par : $diag1elt(X_1, Y_1, [X_2, \ldots X_k], Y2)$ vrai si et seulement si la reine à la position (X_1, Y_1) n'est pas sur la même diagonale droite-gauche que les reines dans les positions $(X_2, Y_2), (X_3, Y_2 + 1), \ldots (X_k, Y_2 + k - 2)$

1.3.2

Ecrire en Prolog (avec des commentaires) le prédicat $diag1$ défini par :
$diag1([X_1, \dots X_k], Y)$ vrai si et seulement si les reines aux positions $(X_1, Y), (X_2, Y+1) \dots (X_k, Y+k-1)$ sont sur des diagonales droite-gauche distinctes.

Il faut sans doute utiliser le prédicat précédent.

1.3.3

Ecrire en Prolog (avec des commentaires) le prédicat $reines$ défini par :
$reines([X_1, \dots X_p])$ vrai si et seulement si l'échiquier étant de taille $p*p$, les reines aux positions $(X_1, 1), (X_2, 2) \dots (X_p, p)$ ne sont pas en prise.

L'appel $reines(L)$ commence par poser les contraintes et termine en énumérant les valeurs des éléments de L. On posera les contraintes à l'aide des prédicats ci-dessus et des prédicats vus en cours et en TD, à la condition de rappeler au moins leur spécification.

2 Logique

2.1 Validité en logique propositionnelle

Déterminer le statut des formules suivantes (valide, non valide). Donnez un contre-modèle des formules non valides. Pour chaque formule, on impose la méthode à employer.

1. Construction d'une table de vérité pour $((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge (a \vee b)) \Rightarrow c$.
2. Transformation en une formule normale conjonctive ($\wedge$ de $\vee$ de littéraux) pour $(a \vee b) \Rightarrow ((\neg a \wedge \neg b) \Rightarrow c)$.
   Pour effectuer cette transformation, on rappelle notamment que la formule $(x \wedge y) \vee z$ est équivalente à la formule $(x \vee z) \wedge (y \vee z)$.
3. Transformation en une formule normale conjonctive pour $(a \vee b) \Rightarrow ((\neg a \vee \neg b) \Rightarrow c)$.
4. Méthode des tableaux appliquée à la négation de la formule pour $((a \Rightarrow b) \vee (c \Rightarrow d)) \Rightarrow ((a \vee c) \Rightarrow (b \vee d))$.
5. Méthode des tableaux appliquée à la négation de la formule pour $((a \vee c) \Rightarrow (b \vee d)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \vee (c \Rightarrow d))$.

2.2 Evaluation

Soit R un symbole de relation à 2 arguments et soit I l'interprétation suivante de domaine $\{1, 2, 3\}$ où $R_I = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$.

Dans cette interprétation (où le signe égal a son sens usuel) donnez les valeurs des formules suivantes :

- $\forall x \exists y R(x,y)$
  Indiquez les calculs effectués pour obtenir cette valeur.
- $\forall x \exists y R(y,x)$
  Donnez uniquement la valeur.
- $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(x,z)) \Rightarrow (y = z))$
  Si vous pensez que cette formule vaut 0, indiquez les valeurs de x, y, z qui donnent la valeur 0 à la formule $((R(x,y) \wedge R(x,z)) \Rightarrow (y = z))$
- $\forall x \forall y \forall z ((R(x,z) \wedge R(y,z)) \Rightarrow (x = y))$
  Si vous pensez que cette formule vaut 0, indiquez les valeurs de x, y, z qui donnent la valeur 0 à la formule $((R(x,z) \wedge R(y,z)) \Rightarrow (x = y))$

2.3 Modèle

Trouvez un modèle (fini ou infini) de l'ensemble des 4 formules suivantes :

1. $\exists x \exists y R(x,y)$
2. $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$
3. $\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow (\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))))$
4. $\forall x \neg R(x,x)$

2.4 Validité en logique du premier ordre

Déterminer si les deux formules suivantes sont valides. Si elles sont valides, le prouver en utilisant la méthode des tableaux. Lorsqu'elles ne sont pas, trouvez un contre-modèle.

1. $((\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists x Q(x))) \Rightarrow (\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)))$
2. $((\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists x Q(x))) \Rightarrow (\exists x \forall y (P(y) \Rightarrow Q(x)))$

Annexe

les règles propositionnelles

$\dfrac{A}{(\neg(\neg A))}\ \neg\neg$	
$\dfrac{A, B}{(A \wedge B)}\ \wedge$	$\dfrac{(\neg A) \quad (\neg B)}{\neg(A \wedge B)}\ \neg\wedge$
$\dfrac{A \quad B}{(A \vee B)}\ \vee$	$\dfrac{(\neg A), (\neg B)}{\neg(A \vee B)}\ \neg\vee$
$\dfrac{(\neg A) \quad B}{(A \Rightarrow B)}\ \Rightarrow$	$\dfrac{A, (\neg B)}{\neg(A \Rightarrow B)}\ \neg \Rightarrow$
$\dfrac{A, B \quad (\neg A), (\neg B)}{(A \Leftrightarrow B)}\ \Leftrightarrow$	$\dfrac{A, (\neg B) \quad (\neg A), B}{\neg(A \Leftrightarrow B)}\ \neg \Leftrightarrow$

les règles des quantificateurs

$\dfrac{A<x := a>}{(\exists x A)}\ \exists$ où a est une nouvelle constante	$\dfrac{(\neg(\exists x A), (\neg A<x := t>)}{(\neg(\exists x A))}\ \neg\exists$ où t est un terme sans variable
$\dfrac{(\forall x A), A<x := t>}{(\forall x A)}\ \forall$ où t est un terme sans variable	$\dfrac{(\neg A)<x := a>}{(\neg(\forall x A))}\ \neg\forall$ où a est une nouvelle constante

Disposition en tableaux

Une formule qu'une règle fait disparaître est marquée et lors d'une règle à deux premisses, *toutes* les formules qui ne sont pas marquées (littéraux compris) sont copiées dans chaque premisse.

Cette disposition obéit au schéma suivant pour la règle $\vee$ dans laquelle Δ^* représente un ensemble de formules marquées et Γ un ensemble de formules qui ne sont pas marquées. L'étoile est la marque que l'on pose. Avant marquage de $(A \vee B)$ la branche $\Gamma, (A \vee B)$ avec ses formules marquées présente la forme :

Δ^*
Γ
$(A \vee B)$

Après application de la règle $\vee$, la branche est coupée en deux, et l'on obtient :

<table>
<tr><td colspan="2">Δ^*</td></tr>
<tr><td colspan="2">Γ^*</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(A \vee B)^*$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>Γ</td><td>Γ</td></tr>
</table>

Les axiomes (appelés aussi branches fermées) sont marqués par une croix. On numérote les formules quand elles sont créées.

Soit A la formule $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$. On montre ci-dessous que $\neg A$ est contradictoire :

<table>
<tr><td colspan="3">(1) $\neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))^*$
(2) $(p \Rightarrow q)^*$ de (1)
(3) $\neg((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))^*$ de (1)
(4) $(q \Rightarrow r)^*$ de (3)
(5) $\neg(p \Rightarrow r)^*$ de (3)
(6) p^* de (5)
(7) $\neg r^*$ de (5)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(8)$\neg p$ de (2)
(4) $(q \Rightarrow r)$
(6) p
(7) $\neg r$
X (branche fermée)</td><td colspan="2">(8) q^* de (2)
(4) $(q \Rightarrow r)^*$
(6) p^*
(7) $\neg r^*$</td></tr>
<tr><td>(9) $\neg q$ de (4)
(8) q
(6) p
(7) $\neg r$
X</td><td>(9) r de (4)
(8) q
(6) p
(7) $\neg r$
X</td></tr>
</table>

Soit B la formule $\exists y \forall x (P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x,y))$. On montre avec cette même disposition que la formule $\neg B$ est contradictoire.

<table>
<tr><td>(1) $\neg((\exists y \forall x P(x,y)) \Rightarrow (\forall x \exists y P(x,y)))^*$
(2) $(\exists y \forall x P(x,y))^*$ de (1)
(3) $\neg(\forall x \exists y P(x,y))^*$ de (1)
(4) $(\forall x P(x,a_1))$ de (2)
(5) $\neg(\exists y P(a_2,y))$ de (3)
(6) $P(a_2,a_1)$ de (4)
(7) $\neg P(a_2,a_1)$ de (5)
X</td></tr>
</table>

On notera que lors de l'application des règles sur les formules (2) et (3), il faut choisir des constantes différentes pour obéir aux règles de preuve que l'on a données.